Материалы для проведения муниципального этапа

# XXXVII МОСКОВСКОЙ ОБЛАСТНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

## 2010–2011 учебный год

## 28 ноября 2010 г.

Долгопрудный, 2010

Сборник содержит материалы для проведения II-го (муниципального) этапа XXXVII Всероссийской олимпиады школьников по математике в Московской области. Задания подготовили члены жюри Московской областной олимпиады школьников по математике Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский (Московский физико-технический институт (государственный университет)).

Рецензенты: И.И. Богданов, Б.В. Трушин.

Компьютерный макет подготовил И.И. Богданов.

**Уважаемые коллеги!**

В соответствии с регламентом проведения Всероссийской олимпиады школьников по математике, рекомендуем при проверке работ оценивать:

- правильное решение в 7 баллов;
- решение с недочетами — 5–6 баллов;
- решение с пропущенными важными случаями, либо с доказанным одним из двух (более сложным) утверждений задачи — 4 балла;
- рассмотрение отдельных важных случаев при отсутствии решения — 1 балл;
- доказательство вспомогательных утверждений, помогающих в решении задачи — 2–3 балла.

Работа выполняется в течение 4 часов, учащимися 6 классов — 3 часов.

Вопросы по организации проведения олимпиады, ее содержанию и оценке работ участников можно задать 28 ноября 2010 г. с 9.30 до 18.30 по телефону (495) 408–76–66.

Согласно Положению о Всероссийской олимпиаде школьников, победителями муниципального этапа являются участники, набравшие наибольшее количество баллов при условии, что количество набранных ими баллов превышает половину максимально возможного количества баллов, то есть не менее 18 баллов. Важно отметить, что как победителями, так и призерами олимпиады в каждой параллели (6–11 классов) могут стать несколько участников — возможно, набравших разное количество баллов, поскольку расхождение результатов двух школьников в несколько баллов может отражать только умение одного из них более четко записывать решения задач. Однако, количество победителей и призеров не должно превышать 25 % от общего числа участников олимпиады.

Поэтому *рекомендуемая* схема определения победителей и призеров такова: победителями олимпиады становятся лучший школьник в параллели, а также участники, отставшие от него на 1–3 балла, при условии, что они набрали не менее 18 баллов. Участники, у которых сумма набранных баллов составляет 60 %–90 % от лучшего результата, становятся призерами олимпиады.

**Внимание!** Приведенные решения не являются единственно правильными. Кроме того, оценка за задачу не должна зависеть от длины решения или его рациональности. В то же время, в 0 баллов оценивается «решение» задачи, при котором используется доказываемое утверждение (наиболее часто это встречается в геометрии: например, нужно доказать, что треугольник равносторонний, а решение начинается со слов «Пусть $\triangle ABC$ — равносторонний...»). Существует ряд задач, в которых ответ выбирается из двух вариантов (например, в задачах с вопросом «Верно ли...», «Может ли...» или «Существует ли...»). В таких задачах только угаданный правильный ответ без объяснений, как правило, оценивается в 0 баллов.

Решение задач на нахождение наибольшего (наименьшего) значения какой-либо величины включает в себя два шага:

1) доказательство того, что эта величина не больше (не меньше) некоторого числа («оценка»);

2) построение примера, показывающего достижимость этого значения («пример»).

В таких задачах, как правило, первый шаг решения оценивается в 4–5 баллов, второй шаг — в 2–3 балла.

Следует учитывать, что школьники, впервые принимающие участие в олимпиаде, особенно учащиеся 6 класса, не умеют четко записывать объяснения в своих решениях. Поэтому в 6–7 классах нужно оценивать степень понимания решения, а не качество его записи.

*Желаем успешной работы!*

В 2010–2011 учебном году III (региональный) этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в Московской области (Московская областная математическая олимпиада) будет проведен 25 января (1 тур) и 26 января (2 тур) 2011 г. для учащихся 9–11 классов. Одновременно для учащихся 8 класса будет проведен региональный тур олимпиады Эйлера. Согласно Положению о Всероссийской олимпиаде школьников, участниками регионального этапа являются:

– школьники, являющиеся победителями и призерами регионального этапа олимпиады предыдущего года;

– победители и призеры муниципального этапа олимпиады текущего года.

Оба тура олимпиады будут проходить в нескольких городах Московской области, список которых будет определен Министерством образования Московской области. Основным местом по проведению регионального этапа олимпиады традиционно будет МФТИ — Московский физико-технический институт (государственный университет).

Для организации областной олимпиады оргкомитеты муниципального этапа олимпиады обязаны предоставить протоколы муниципального этапа олимпиады и отправить заявку на участие в Министерство образования Московской области по электронному адресу `obsh_obraz@mail.ru` (Варлахина Лариса Михайловна).

Для формирования списков участников регионального этапа олимпиады и олимпиады Эйлера просьба дополнительно направить копии списков победителей и призеров по 8–11 классам в электронном виде в Оргкомитет олимпиады по адресу `mosoblmath2011@mail.ru`.

# Условия и решения задач

## 6 класс

6.1. Замените в примере на сложение десятичных дробей каждую звездочку цифрой 2 или цифрой 3 так, чтобы получилось верное равенство:

$$0{,}{*}{*} + 0{,}{*}{*} + 0{,}{*}{*} + 0{,}{*}{*} = 1.$$

**Решение.** Существуют два примера с точностью до перестановки слагаемых: $0{,}22 + 0{,}23 + 0{,}23 + 0{,}32 = 1$ и $0{,}22 + 0{,}22 + 0{,}23 + 0{,}33 = 1$.

**Комментарий.** Ставить 7 баллов при любом правильном примере.

6.2. Ученики 6 класса отправились на праздник. У каждого мальчика было по 5 воздушных шариков, а у каждой девочки — по 4 шарика. По дороге дети стали баловаться и прокалывать шарики друг у друга. В итоге каждая девочка проколола по 1 шарику, а каждый мальчик — по 2 шарика. Могло ли так оказаться, что, когда они пришли на праздник, у них всего осталось 100 шариков?

**Ответ.** Не могло.

**Решение.** Будем считать, что дети прокалывали свои шарики. От этого предположения общее количество проколотых шариков не изменится. Тогда, когда дети пришли на праздник, у каждого мальчика будет по $5 - 2 = 3$ шарика, и у каждой девочки будет по $4 - 1 = 3$ шарика. То есть у каждого из детей будет по 3 шарика. Но 100 на 3 не делится, поэтому у всех детей не могло остаться ровно 100 шариков.

**Комментарий.** Только ответ — 0 баллов.

6.3. Маша ездит на велосипеде вдвое быстрее своего младшего брата Васи, а на самокате вдвое медленнее, чем он на велосипеде. Маша и Вася, стартовав вместе, поехали на велосипедах, и через две минуты Маша пересела на самокат. Через какое время Вася догонит Машу?





**Ответ.** Через 4 минуты.

**Решение.** Разность между скоростями Маши и Васи, когда Маша едет на велосипеде, вдвое больше, чем разность между скоростями Васи и Маши, когда она едет на самокате. Поэтому на то, чтобы догнать Машу, Васе потребуется вдвое больше времени, чем она от него уезжала.

**Комментарий.** Ответ без объяснений — 3 балла.

6.4. Участок $40 \times 50$ метров выделен под огороды и обнесен оградой снаружи. Как установить внутри участка 6 прямолинейных оград одинаковой длины, чтобы разбить участок на 5 прямоугольных участков одинаковой площади?

**Решение.** Один из возможных примеров показан на рис. 1. Ограды имеют длину 20 м, их концы отмечены жирными точками.

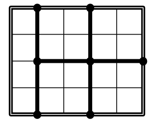

Рис. 1

6.5. Иван-Царевич спросил на развилке дорог у трех зверей: Зайца, Лисы и Медведя путь в Кощеево царство (он знает, что путь ровно один). Первый зверь ответил: «Налево». Второй сказал: «Первый зверь указал неверный путь», и добавил «Направо». Третий — «Первый зверь указал неверный путь», «Второй зверь оба раза солгал», «Прямо». Подскажите Ивану-Царевичу верную дорогу и определите, в каком порядке отвечали звери, если известно, что Лиса всегда лжет, Медведь всегда говорит правду, а трусливый Заяц чередует правильные ответы с неправильными, начиная либо с правды, либо со лжи. (Обязательно обоснуйте свой ответ.)

**Ответ.** Налево. Первым был Медведь, второй — Лиса, а третьим — Заяц.

**Решение.** Обозначим первого, второго и третьего зверей I, II, III соответственно. Если I солгал, то II и III первыми высказываниями сказали правду; это значит вдобавок, что III вторым утверждением солгал. Значит, III может быть только Зайцем (и в третий раз говорит правду), а II тогда — Медведь. Но их последние высказывания противоречат друг другу, что невозможно.

Значит, I сказал правду. Тогда первые высказывания зверей II и III ложны. Более того, II солгал и во второй раз, ибо указал неверный путь; значит, II — Лиса. Поскольку III лгал хотя бы раз, то он — не Медведь. Итого, III — Заяц, I — Медведь, правильный путь — налево, и Заяц действительно солгал только в первый и третий раз.

**Комментарий.** Правильно угаданное направление (без объяснений) — 0 баллов.

Правильный ответ на оба вопроса (без объяснений) — 2 балла.

Правильный разбор части случаев (например, I — Лиса и т.п.) — до 3 баллов.





# 7 класс

7.1. Найдите какие-нибудь три последовательных натуральных числа, меньших 1000, произведение которых делится на 9999.

**Ответ.** Например, 99, 100 и 101.

**Решение.** Этот пример можно получить, заметив, что $9999 = 99 \cdot 101$.

**Замечание.** Кроме этого, существует ровно один другой пример: 504, 505, 506.

**Комментарий.** Ставить 7 баллов при любом правильном примере.

7.2. Одноклассники во время контрольной посылали друг другу записки. После контрольной семеро сказали: «Я отправил на одну записку больше, чем получил»; каждый из остальных сказал: «Я отправил на две записки меньше, чем получил». Докажите, что кто-то из ребят ошибся.

**Решение.** Каждая записка считается дважды: один раз как отправленная, другой — как полученная. Поскольку семь ребят отправили суммарно на 7 записок больше, чем получили, то остальные в совокупности должны были получить на 7 записок больше, чем отправили. Но это невозможно: поскольку каждый из них получил на 2 записки больше, чем отправил, то все вместе они получили на четное число записок больше. А число 7 — нечетное.

7.3. Вася, Петя и Миша ходили на рыбалку. На обратном пути они встретили друзей, которые спросили их про улов. Каждый из ребят произнес по два предложения. Вася сказал: «Я поймал больше всех», «Петя и Миша вместе поймали 7 рыб». Петя: «Нет, я поймал больше всех», «Все вместе мы поймали 10 рыб». Миша: «Мы с Петей выловили поровну», «Вася поймал меньше 4 рыб». Известно, что тот, чей улов больше, чем у остальных, говорил правду, а остальные двое по разу солгали и по разу сказали правду. Кто из ребят выловил больше всех рыб? (Обязательно обоснуйте свой ответ.)

**Ответ.** Петя.

**Решение.** Предположим, что Миша выловил больше всех рыб и оба раза сказал правду. Но тогда его первая фраза не может быть правдой, так как он должен был выловить рыб больше, чем Петя. Значит, Миша не мог выловить больше всех рыб.

Предположим, что Вася выловил больше всех рыб и оба раза сказал правду. Тогда Петя и Миша вместе поймали 7 рыб. Петя один раз сказал неправду, а один раз — правду. При этом его первая фраза не может быть правдой. Значит, правда, что все вместе ребята поймали 10 рыб. Но тогда Вася поймал $10 - 7 = 3$ рыбы, а Петя или Миша — больше 3 рыб (так как вместе они поймали 7 рыб). Значит, Вася не мог выловить больше всех рыб.

Поэтому больше всех рыб выловил Петя. Такая ситуация возможна, например, в случае, когда Петя поймал 4 рыбы, а Вася и Миша — по 3 рыбы. Петя оба раза сказал правду. Первое васино предложение — ложь, второе — правда. Первое мишино предложение — ложь, второе — правда.

**Комментарий.** Правильный ответ без объяснений — 0 баллов.

Правильный разбор части случаев (например, случая, когда Миша поймал больше всех и т.п.) — до 3 баллов.

7.4. Участок $80 \times 50$ метров выделен под огороды и обнесен оградой снаружи. Как установить внутри участка 5 прямолинейных оград одинаковой длины, чтобы разбить участок на 5 прямоугольных участков одинаковой площади?

**Решение.** Один из возможных примеров показан на рис. 2. Ограды имеют длину 40 м, их концы отмечены жирными точками (горизонтальный отрезок составлен из двух оград).

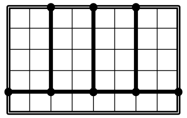

Рис. 2

7.5. Для четырех различных натуральных чисел $a, b, c, d$ составлена «таблица сложения» размера $4 \times 4$ клетки. (Сбоку и сверху от таблицы поставлены числа $a, b, c, d$, а в клетки записаны 16 чисел — их суммы.) Какое наибольшее количество из 16 чисел, записанных в таблицу, могли оказаться простыми?

**Ответ.** 9 чисел.

**Решение.** Рассмотрим несколько случаев.





Если все четыре числа $a, b, c, d$ четные или все четыре нечетные, то в таблице стоит 16 четных чисел.

Если три числа из $a, b, c, d$ четные, а одно нечетное, или три нечетные, а одно четное, то в таблице стоит 10 четных чисел.

Если два числа из $a, b, c, d$ четные, а два нечетные, то в таблице стоит 8 четных чисел.

Поэтому в любом случае в таблице не менее 8 четных чисел. Из четных чисел не более одного может быть простым (так как $1 + 1 = 2$, а бо́льшие четные числа — составные). Поэтому в таблице не менее 7 составных чисел. Значит, в таблице не более 9 простых чисел.

Если, например, $a = 1, b = 2, c = 3, d = 4$, то в таблице будет 9 простых чисел: одна двойка, по два числа 3, 7 и четыре пятерки.

**Комментарий.** Доказано, что простых чисел не больше девяти — 4 балла.

Только пример с девятью простыми суммами — 2 балла.

# 8 класс

8.1. Найдите какие-нибудь четыре последовательных натуральных числа, меньших 100, произведение которых делится на 999.

**Ответ.** Например, 36, 37, 38, 39.

**Решение.** Ответ можно получить, заметив, что $999 = 9 \cdot 3 \cdot 37$.

**Замечание.** Кроме этого, существует ровно один другой пример: 72, 73, 74, 75.

**Комментарий.** Ставить 7 баллов при любом правильном примере.

8.2. Девять последовательных натуральных чисел записали произвольным образом в клетки квадрата $3 \times 3$ и подсчитали произведения чисел в строках и произведения чисел в столбцах. Сумма шести полученных произведений нечетна. Докажите, что в таблице есть строка и столбец с нечетными суммами чисел.

**Решение.** Сумма данных шести чисел нечетна, поэтому хотя бы одно из произведений нечетно. Пусть, например, нечетным является произведение чисел в первом столбце (остальные случаи аналогичны). Тогда все три числа в этом столбце — нечетны. В шести оставшихся клетках квадрата могут быть записаны не больше, чем два нечетных числа, так как среди девяти последовательных чисел не более пяти нечетных. Значит, в двух других столбцах квадрата $3 \times 3$ не более двух нечетных чисел. Это означает, что хотя бы в одну строку ни одно из нечетных чисел не попало. Следовательно в этой строке содержится только одно нечетное число — в первом столбце. Итак, у нас есть первый столбец, содержащий три нечетных числа и строка ровно с одним нечетным числом. Именно в них суммы чисел нечетны.

**Комментарий.** Доказано, что найдется строка **или** столбец с нечетной суммой чисел — 2 балла.

8.3. Прогульщик Вася в каждый понедельник сентября некоторого года пропускал по одному уроку, в каждый вторник — по два урока, …, в каждую пятницу — по пять уроков. Могло ли оказаться так, что за весь сентябрь он пропустил ровно 64 урока?





(Все субботы и воскресенья сентября были выходными, а остальные дни — учебными. В сентябре 30 дней.)

**Ответ.** Не могло.

**Решение.** Предположим, что Вася прогулял ровно 64 урока. Заметим, что сентябрь содержит четыре полных недели и еще два подряд идущих дня. За одну полную неделю Вася прогулял $1+2+3+4+5 = 15$ уроков. То есть за четыре недели Вася прогулял ровно 60 уроков, а за два подряд идущих дня — 4 урока. Но если среди этих двух дней есть выходной, то оставшийся день — понедельник или пятница, что не подходит. Если же оба дня учебные, то Вася должен был прогулять нечетное количество уроков (3, 5, 7 или 9), что также не подходит. Значит, Вася не мог прогулять ровно 64 урока.

**Замечание.** Возможно и решение перебором всех случаев: «Пусть 1 сентября — понедельник», «Пусть 1 сентября — вторник» и т.д.

**Комментарий.** При полном переборе случаев — 7 баллов.

Если хотя бы один случай не рассмотрен или рассмотрен неверно — не более 3 баллов.

8.4. В остроугольном треугольнике $ABC$ проведены высоты $AD$, $BE$ и $CF$. Оказалось, что четырехугольник $FBDE$ — ромб. Докажите, что треугольник $ABC$ — равносторонний.

**Решение.** Диагонали ромба $FBDE$ делятся точкой пересечения $O$ пополам и взаимно перпендикулярны. Поскольку прямые $DF$ и $AC$ перпендикулярны $BE$, они параллельны между собой. Значит, прямая $DF$ является средней линией в треугольниках $ABE$ и $CBE$, то есть точки $D$ и $F$ — середины сторон $BC$ и $AB$ соответственно. Таким образом, высоты $AD$ и $CF$ являются медианами, откуда $AB = AC$ и $BC = AC$, то есть треугольник $ABC$ — равносторонний.

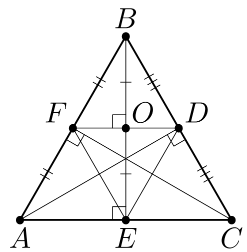

Рис. 3

8.5. На доске написаны пять ненулевых чисел. К ним дописаны еще пять чисел, получаемых следующим образом: из квадрата каждого из исходных чисел вычитается сумма четырех остальных исходных чисел. Какое наибольшее количество отрицательных чисел могло оказаться среди всех десяти чисел на доске?

**Ответ.** 8 чисел.

**Решение.** Если все пять исходных чисел отрицательны, то все пять новых чисел будут положительными, как разности между положительным числом (квадратом ненулевого числа) и суммой отрицательных чисел. Всего получится пять отрицательных чисел.

Пусть теперь среди пяти исходных чисел $a, b, c, d, e$ есть положительное, например, $e > 0$. Рассмотрим пять чисел: $a, b, c, d, e^2 - (a + b + c + d)$. Их сумма равна $e^2 > 0$. Значит, среди этих чисел должно быть по крайней мере еще одно положительное, отличное от числа $e$, и поэтому отрицательных чисел не больше восьми.

Покажем, что восемь отрицательных числе среди десяти написанных на доске могло быть. Подходит, например, следующий исходный набор чисел: $a = b = c = d = -1$, $e = 10$. Тогда среди пяти дописанных чисел будут четыре отрицательных числа, равных $-6$, и одно положительное число 104.

**Комментарий.** Только правильный ответ — 0 баллов.

Доказано, что отрицательных чисел не больше восьми — 4 балла.

Приведен пример, в котором ровно 8 отрицательных чисел — 2 балла.





# 9 класс

9.1. Найдите какие-нибудь три последовательных натуральных числа, меньших 100, произведение которых делится на 2010.

**Ответ.** Например, 65, 66, 67.

**Решение.** Ответ можно получить, заметив, что $2010 = 67 \cdot 6 \cdot 5$.

**Замечание.** Других чисел, удовлетворяющих условию, нет.

**Комментарий.** Ставить 7 баллов за приведенный правильный пример.

9.2. Верно ли, что любые два различных целых числа можно записать вместо чисел $a$ и $b$ в выражении $x^2 + ax + b$ так, чтобы полученный квадратный трехчлен имел хотя бы один корень?

**Ответ.** Верно.

**Решение. Первое решение.** Поставим вместо $a$ большее из двух данных чисел. Поскольку числа — целые и различные, то $b \leqslant a - 1$, поэтому дискриминант $D = a^2 - 4b \geqslant a^2 - 4(a - 1) = (a - 2)^2 \geqslant 0$. Значит, трехчлен имеет корень.

**Второе решение.** Если одно из чисел неположительно, то его можно взять в качестве коэффициента $b$, и полученный трехчлен будет иметь корни, так как дискриминант $D = a^2 - 4b \geqslant -4b \geqslant 0$.

Пусть теперь оба числа положительны.

Если большее из чисел не меньше 4, то большее число можно взять в качестве коэффициента $a$, получая $a \geqslant 4$, $a > b$. Тогда дискриминант $D = a^2 - 4b \geqslant 4a - 4b = 4(a - b) > 0$, и трехчлен опять имеет корни.

Пусть оба числа меньше 4. Тогда возможны три случая: 1 и 2, 2 и 3, 1 и 3. В этих случаях подойдут трехчлены $x^2 + 2x + 1$, $x^2 + 3x + 2$ и $x^2 + 3x + 1$.

**Комментарий.** Утверждается без доказательства, что большее (или большее по модулю) число можно поставить в качестве коэффициента $a$ — 1 балл.

В доказательстве предыдущего утверждения пропущен (или неверен) разбор случаев малых по модулю чисел — снять 3 балла.

9.3. На доске написаны ненулевые числа $a, b, c$, а также числа $a^2 - b, b^2 - c, c^2 - a$. Какое наибольшее количество отрицательных чисел могло быть записано на доске?

**Ответ.** 3 числа.

**Решение.** Разобьем числа на пары: $a$ и $c^2 - a$, $b$ и $a^2 - b$, $c$ и $b^2 - c$. В каждой паре сумма чисел положительна, поэтому в каждой паре не более одного отрицательного числа. Значит, всего отрицательных чисел не более трех. Три числа из шести могли оказаться отрицательными, например, если числа $a, b, c$ отрицательны.

**Комментарий.** Доказано, что отрицательных чисел не больше трех — 4 балла.

Приведен пример с тремя отрицательными числами — 1 балл.

9.4. В классе на День защитника Отечества девочки принесли подарки для своих одноклассников-мальчиков: одна — 1 подарок, вторая — 2 подарка, третья — 3 подарка и т.д. Оказалось, что каждый мальчик получил одинаковое число подарков.

На 8 Марта мальчики поздравляли одноклассниц и принесли: первый — 1 подарок, второй — 2 подарка, третий — 3 подарка и т.д. Также оказалось, что каждая девочка получила одинаковое число подарков. Докажите, что мальчиков или девочек (или и тех и других) в классе нечетное число.

**Решение.** Пусть в классе $n$ мальчиков и $k$ девочек. Вместе девочки подарили мальчикам $1 + 2 + 3 + \ldots + k = k(k+1)/2$ подарков. Значит, $k(k+1)/2 = an$, где a — количество подарков, которое получил один мальчик, т.е. $k(k+1) = 2an$. Аналогично получаем равенство $n(n+1) = 2bk$, где $b$ — натуральное число.

Перемножив два полученных равенства, получаем: $k(k+1)n(n+1) = 4anbk$, откуда $(k+1)(n+1) = 4ab$. Число в правой части равенства четно, поэтому хотя бы один из сомножителей $k+1$ и $n+1$ — четный. Это означает, что хотя бы одно из чисел $k$ и $n$ нечетно.

9.5. Точки $M$ и $N$ — середины сторон $BC$ и $CD$ четырехугольника $ABCD$. Оказалось, что отрезки $AM$ и $AN$ делят диагональ $BD$ на три равных отрезка. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.





**Решение.** Пусть отрезки $AM$ и $AN$ пересекают $BD$ в точках $K$ и $L$ соответственно. Поскольку $BK = KL = LD$, отрезки $KM$ и $LN$ являются средними линиями в треугольниках $BLC$ и $DKC$ соответственно. Значит, $AM \parallel CL$ и $AN \parallel CK$. Следовательно, четырехугольник $AKCL$ является параллелограммом, то есть точка пересечения его диагоналей $O$ делит их пополам. Таким образом, $AO = OC$ и $BO = BK + KO = DL + LO = DO$, то есть диагонали четырехугольника $ABCD$ также делятся точкой пересечения пополам. Это и значит, что $ABCD$ — параллелограмм.

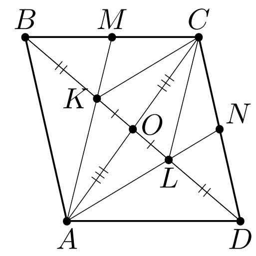


Рис. 4

# 10 класс

10.1. Найдите какие-нибудь три вектора с нулевой суммой таких, что при вычитании из суммы любых двух векторов третьего вектора получается вектор длины 1.

**Ответ.** Три вектора длины $1/2$, направленных из центра правильного треугольника к его вершинам.

**Решение.** Алгебраическая сумма $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ получается из нулевой суммы векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ вычитанием из нулевого вектора удвоенного вектора $\vec{c}$. Значит, длина каждого вектора должна быть равна $1/2$, а их сумма — нулевому вектору. Приведенные выше три вектора удовлетворяют этим условиям.

**Замечание.** Несложно показать, что других примеров, удовлетворяющих условию задачи, не существует.

**Комментарий.** Правильный пример без обоснования того, что он подходит — 5 баллов.

10.2. Три квадратных трехчлена получены из трехчлена $ax^2+bx+c$: один — прибавлением единицы к коэффициенту $a$, другой — прибавлением единицы к коэффициенту $b$, третий — прибавлением единицы к коэффициенту $c$. Оказалось, что любые два из полученных трехчленов имеют общий корень. Докажите, что сумма коэффициентов исходного трехчлена — целое число.

**Решение.** По условию, уравнения $ax^2+bx+(c+1)=0$ и $ax^2+(b+1)x+c=0$ имеют общий корень. Вычтя одно равенство из другого, получим $x=1$. Поэтому общий корень $x=1$. Но тогда $a\cdot 1^2+b\cdot 1+(c+1)=0$, то есть сумма коэффициентов $a+b+c=-1$ — целое число.

**Замечание.** Если $a+b+c=-1$, то $x=1$ — общий корень всех трех уравнений.

**Комментарий.** Нахождение возможных общих корней пар уравнений без дальнейших продвижений — 0 баллов.

10.3. Про $n$ различных натуральных чисел известно, что из любых трех из них можно выбрать два так, что сумма этих двух чисел — простое число. При каком наибольшем $n$ это возможно?

**Ответ.** $n=4$.

**Решение.** Заметим, что если среди $n$ чисел будут три четных или три нечетных, то сумма любых двух чисел из этих трех — четное число, большее 2, то есть составное число. Поэтому среди $n$ чисел будет не более двух четных и не более двух нечетных, то есть $n\leqslant 4$.

Осталось показать, что случай $n=4$ возможен. Рассмотрим набор из четырех чисел: 1, 2, 3 и 4. Тогда из любых трех из них можно выбрать два так, что сумма этих двух чисел — простое число. Действительно, если набор состоит из чисел $1,2,3$ или $1,2,4$, то $1+2=3$ — простое. Если набор состоит из чисел $2,3,4$ или $1,3,4$, то $3+4=7$ — простое.

**Комментарий.** Только правильный ответ — 0 баллов.

Доказано, что чисел не больше четырех — 4 балла.

Приведен пример четырех чисел, удовлетворяющих условию — 2 балла.

Доказано только, что четных чисел не больше трех (или нечетных чисел не больше трех) — 1 балл.

10.4. Биссектрисы $AM$ и $CN$ треугольника $ABC$ пересекаются в точке $I$. Оказалось, что площади треугольника $AIC$ и четырехугольника $MINB$ равны. Докажите, что длины сторон треугольника $ABC$ образуют геометрическую прогрессию.

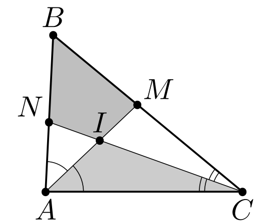


Рис. 5

**Решение.** По условию, $S_{AIC}=S_{MINB}$. Прибавив к обеим частям этого равенства $S_{CIM}$, получаем $S_{AMC}=S_{CNB}$; с другой стороны, прибавляя $S_{AIN}$, получаем $S_{AMB}=S_{ANC}$. Значит, $\frac{S_{AMC}}{S_{AMB}}=\frac{S_{CNB}}{S_{ANC}}$. Поскольку точка $M$ лежит на биссектрисе, в треугольниках $ABM$ и $ACM$ высоты из вершины $M$ равны. Значит, $\frac{S_{AMC}}{S_{AMB}}=\frac{AC}{AB}$. Аналогично получаем $\frac{S_{CNB}}{S_{ANC}}=\frac{BC}{AC}$. Итого, имеем $\frac{AC}{AB}=\frac{BC}{AC}$, что и означает, что $AB, AC, BC$ — геометрическая прогрессия.

10.5. На доске написаны 2010 ненулевых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2010}$ и произведения всех пар соседних чисел: $a_1\cdot a_2$, $a_2\cdot a_3$, $a_3\cdot a_4$, …,

$a_{2009} \cdot a_{2010}$. Какое наибольшее количество отрицательных чисел может быть среди этих 4019 чисел?

**Ответ.** 3014 чисел.

**Решение.** Рассмотрим тройки чисел

$$(a_1, a_2, a_1 \cdot a_2), (a_3, a_4, a_3 \cdot a_4), \ldots, (a_{2009}, a_{2010}, a_{2009} \cdot a_{2010}).$$

Произведение чисел в каждой тройке положительно (оно равно произведению квадратов двух ненулевых чисел); значит, среди трех ее чисел есть хотя бы одно положительное, так как произведение трех отрицательных чисел отрицательно. Указанные тройки чисел не пересекаются, поэтому среди написанных на доске чисел не менее 1005 положительных.

Покажем теперь, что можно выбрать такие 2010 исходных чисел, что на доске окажется ровно 1005 положительных чисел. Для этого сделаем все числа $a_i$ с нечетными номерами положительными (их количество — 1005), а с четными номерами — отрицательными. Тогда каждое из произведений отрицательно (как произведение двух чисел разных знаков), и положительными являются только 1005 исходных чисел с нечетными номерами. Следовательно, наибольшее количество отрицательных чисел на доске равно $4019 - 1005 = 3014$.

**Замечание.** Существуют и другие примеры, в которых ровно 3014 отрицательных чисел.

**Комментарий.** Доказано только, что отрицательных чисел не больше 3014 (или положительных не меньше 1005) — 4 балла.

Приведен пример, в котором ровно 3014 отрицательных чисел — 2 балла.





# 11 класс

11.1. Сумма четырех векторов равна нулевому вектору, а при вычитании из суммы любых трех векторов четвертого вектора получается вектор длины 1. Какой может быть сумма длин этих четырех векторов?

**Ответ.** 2.

**Решение.** Пусть исходные четыре вектора — $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$. Тогда $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-\vec{d} = (\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})-2\vec{d} = -2\vec{d}$, так как сумма всех четырех векторов нулевая. Поскольку по условию вектор $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-\vec{d}$ имеет длину 1, то длина $\vec{d}$ равна 1/2. Аналогично, каждый из четырех векторов имеет длину 1/2, а тогда сумма их длин равна 2.

**Комментарий.** Приведен только пример векторов, удовлетворяющих условию (с суммой длин, равной 2) — 2 балла.

11.2. В турнире по дзюдо участвовали 100 спортсменов. Схватки проводились по очереди. По правилам турнира, участник выбывает, как только он проигрывает две схватки. Каждые два спортсмена по правилам могут встретиться не более одного раза. Турнир заканчивается, когда невозможно больше провести ни одной схватки. Какое наибольшее количество участников могло остаться в турнире к моменту его завершения?

**Ответ.** 3.

**Решение.** В момент завершения турнира каждые двое из оставшихся участников должны были встретиться друг с другом, иначе можно было бы провести еще одну схватку — между этой парой участников. Пусть осталось не менее четырех участников. Выберем любых четырех из них. Каждый должен был проиграть во встречах между ними не более одного раза. Значит, общее количество поражений, а значит, и количество схваток между этими спортсменами не больше 4. В то же время общее количество схваток между четырьмя спортсменами равно 6. Противоречие.

Турнир с итогом, когда осталось ровно три спортсмена, мог, например, получиться, если бы вначале 97 спортсменов встречались только с двумя и им постоянно проигрывали, а потом эти два спортсмена вместе с сотым (ни проведшим до того ни одной схватки) по кругу одержали победы в схватках между собой: $A$ выиграл у $B$, $B$ — у $C$, а $C$ — у $A$.

**Комментарий.** Доказано, что останется не больше трех спортсменов — 4 балла.

Приведен пример с тремя оставшимися спортсменами — 2 балла.

11.3. Числа $a$, $b$, $c$ таковы, что при некоторых различных положительных $x$, $y$ верны равенства $x^3 = ay^2 + by + c$, $y^3 = ax^2 + bx + c$. Докажите, что среди чисел $a$, $b$, $c$ есть отрицательное.

**Решение. Первое решение.** Пусть $0 < x < y$ — числа, при которых верны данные равенства. Вычитая из одного равенства другое, получаем: $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = (x - y)(-a(x + y) - b)$. Разделив на ненулевое число $x - y$, получаем: $x^2 + xy + y^2 = -a(x + y) - b$. В левой части последнего равенства стоит сумма трех положительных чисел, т.е. положительное число. Значит, хотя бы одно слагаемое в правой части также положительно. Отсюда, с учетом положительности суммы $x + y$, по крайней мере одно из чисел $a$ и $b$ отрицательно.

**Второе решение.** Предположим, что числа $a$ и $b$ неотрицательны. Тогда функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ не убывает (возрастает или является постоянной) при положительных $x$. Функция $g(x) = x^3$ является строго возрастающей при положительных $x$. Поэтому при $0 < x < y$ выполняются неравенства $g(x) < g(y)$ и $f(x) \leqslant f(y)$, следовательно, $g(x) = f(y) \geqslant f(x) = g(y) > g(x)$. Это противоречит условию.

Значит, среди чисел $a$ и $b$ есть отрицательное.

11.4. В четырехугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ площади всех четырех боковых граней равны. Плоскость $\alpha$ пересекает ребра $SA$, $SB$, $SC$, $SD$ в точках $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$ так, что у пирамиды $SA_1B_1C_1D_1$ площади двух соседних боковых граней равны. Докажите, что и площади двух других боковых граней этой пирамиды также равны.

**Решение.** Пусть для определенности $S_{SA_1B_1} = S_{SB_1C_1}$. Из равенства площадей боковых граней имеем $S_{SAB} \cdot S_{SCD} = S_{SBC} \cdot S_{SAD}$, или





$$SA \cdot SB \cdot \sin ASB \cdot SC \cdot SD \cdot \sin CSD = SB \cdot SC \cdot \sin BSC \cdot SA \cdot SD \cdot \sin ASD.$$

Сокращая на $SA \cdot SB \cdot SC \cdot SD$, получаем $\sin ASB \cdot \sin CSD = \sin BSC \cdot \sin ASD$. Умножая это равенство на произведение $SA_1 \cdot SB_1 \cdot SC_1 \cdot SD_1$, аналогично получаем, что $S_{SA_1B_1} \cdot S_{SC_1D_1} = S_{SB_1C_1} \cdot S_{SA_1D_1}$. Значит, если первые сомножители равны, то и вторые также равны, что и требовалось доказать.

11.5. На доске вначале написаны два целых числа. Если на доске написаны числа $a$ и $b$, то разрешается дописывать на доску число $a^3 - 2010b$. Может ли оказаться так, что на доске в некоторый момент появятся все целые числа от 2010 до 2020?

**Ответ.** Не может.

**Решение.** Пусть $x$ и $y$ — целые числа. Рассмотрим числа $x^3 - 2010y$ и $x$. Заметим, что $x^3 - 2010y - x = x(x - 1)(x + 1) - 2010y$. Так как произведение трех последовательных чисел делится на 3, и 2010 делится на 3, то и разность $x^3 - 2010y - x$ делится на 3. Это означает, что числа $x^3 - 2010y$ и $x$ имеют одинаковые остатки при делении на 3.

Так как остатков при делении на 3 ровно три, а чисел на доске изначально два, то по крайней мере одного остатка от деления на 3 на доске нет. Каждое дописывание числа вида $x^3 - 2010y$ добавляет на доску число с таким же остатком при делении на 3, как и у числа $x$. Поэтому на доске не могут появиться числа с отсутствующим остатком. Итак, на доске не могут появиться одновременно даже числа 2010, 2011, 2012, поскольку они имеют остатки 0, 1 и 2 при делении на 3.

**Комментарий.** Только правильный ответ — 0 баллов.